Baccalauréat, Session Ordinaire 2022, sections PC et SVT

CORRIGÉ

Abdellatif EL HOUTA

Inspecteur Coordonnateur de Mathématiques
Région de Marrakech-Safi

EXERCICE 1

1) a- On a : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 2$. Supposons $u_n > 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) + 1$

Donc $u_{n+1} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1)$ et par suite, si $u_n > 1$ alors $u_{n+1} > 1$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 1$

b- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = (u_{n+1} - 1) - (u_n - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) - (u_n - 1)$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$.

Comme $u_n > 1$ et $\sqrt{2} - 2 < 0$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$ et par suite (u_n) est décroissante.

(u_n) est décroissante minorée (par 1) donc convergente.

2) a- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) \qquad \text{(voir } \mathbf{1)\ a\text{-}}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}v_n \end{aligned}$$

(v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1 = 1$.

b- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ donc $u_n = 1 + v_n = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

On a : $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$

c- $S = \sum\limits_{k=0}^{2021} u_k = \sum\limits_{k=0}^{2021}\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{2021} 1 + \sum\limits_{k=0}^{2021}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k = 2022 + \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

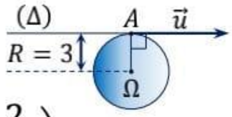
Donc (détails non demandés) : $S = 2022 + \frac{2\left(1-\frac{1}{2^{1011}}\right)}{2-\sqrt{2}}$ et ainsi : $S = 2022 + \frac{2^{1011}-1}{2^{1010}(2-\sqrt{2})}$

EXERCICE 2

$A(1,-1,1)$, $B(5,1,-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$. (S) la sphère de centre $\Omega(3,0,-1)$ de rayon $R = 3$ et (Δ) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

1) a- On a : $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc $\Omega A = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

b- On a : $\vec{u}.\overrightarrow{\Omega A} = 2 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 1 \times 2 = 0$ donc $(\Delta) \perp (\Omega A)$



c- On a : $d\big(\Omega, (\Delta)\big) = \Omega A = R$ donc (Δ) est tangente à $(\mathcal{S})$ (en A).

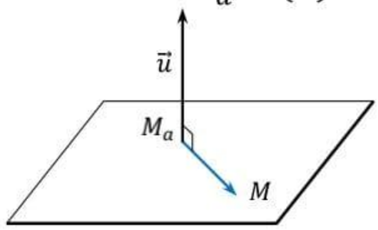
2) a- On a : $\overrightarrow{AM_a}\begin{pmatrix} 2a-3-1 \\ 3-2a+1 \\ a-1-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM_a}\begin{pmatrix} 2(a-2) \\ -2(a-2) \\ a-2 \end{pmatrix}$ et on sait que $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc : $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$

b- (Δ) est définie par A et $\vec{u}$, donc $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Pour tout réel a on a : $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ donc $\overrightarrow{AM_a}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $M_a \in (\Delta)$

3) a- On a : $\overrightarrow{M_aM}\begin{pmatrix} x-2a+3 \\ y+2a-3 \\ z-a+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$(\Delta) \perp (\mathcal{P}_a)$ donc $\vec{u}$ est normal $(\mathcal{P}_a)$, ainsi :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (\mathcal{P}_a) &\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{M_aM} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-2a+3) - 2(y+2a-3) + 1(z-a+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 2y + z - 9a + 13 = 0 \end{aligned}$$

b- Posons $d_a = d(\Omega,)$. On a : $d_a = \frac{|6-1-9a+13|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|18-9a|}{\sqrt{9}} = |6-3a| = |3a-6|$

c- $(\mathcal{P}_a)$ est tangent à $(\mathcal{S})$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow d_a = R \text{ où } R = 3 \\ &\Leftrightarrow |3a-6| = 3 \\ &\Leftrightarrow |a-2| = 1 \\ &\Leftrightarrow a-2 = 1 \text{ ou } a-2 = -1 \\ &\Leftrightarrow a = 3 \text{ ou } a = 1 \end{aligned}$$

EXERCICE 3

$Z_A = 1+5i$, $Z_B = 1-5i$, $Z_C = 5-3i$

t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et $\mathcal{R}$ la rotation de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

1) On a : $Z_D = \frac{Z_A+Z_C}{2} = \frac{6+2i}{2} = 3+i$

2) h l'homothétie de centre A et de rapport $k = \frac{1}{2}$

On a :
$$\begin{aligned} h(B) = E &\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = k\,\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow Z_E - Z_A = \tfrac{1}{2}(Z_B - Z_A) \\ &\Leftrightarrow Z_E = 1+5i+\tfrac{1}{2}(1-5i-1-5i) \\ &\Leftrightarrow Z_E = 1 \end{aligned}$$

3) $\mathcal{R}$ la rotation de centre C et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Posons $\mathcal{R}(B) = G$

On a :
$$\begin{aligned} \mathcal{R}(B) = G &\Leftrightarrow Z_G - Z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_C) \\ &\Leftrightarrow Z_G = 5-3i-i(1-5i-5+3i) \\ &\Leftrightarrow Z_G = 3+i \end{aligned}$$

On remarque que $Z_G = Z_D$ donc $\mathcal{R}(B) = D$

4) $Z_F = -1+i$.

a- On a : $\frac{Z_D-Z_A}{Z_F-Z_A} \times \frac{Z_F-Z_E}{Z_D-Z_E} = \frac{2-4i}{-2-4i} \times \frac{-2+i}{2+i} = \frac{1-2i}{-1-2i} \times \frac{2i^2+i}{-2i^2+i} = \frac{1-2i}{-1-2i} \times \frac{i(2i+1)}{i(-2i+1)} = -1$

b- On a : $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right) \equiv \arg \frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} + \arg \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} \quad [2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E}\right) \quad [2\pi]$$

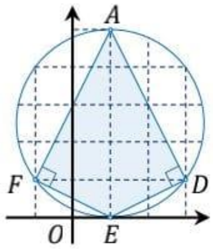
$$\equiv \arg(-1) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \pi \quad [2\pi]$$

c- On a : $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \frac{2-i}{2+4i} = -\frac{i+2i^2}{2(1+2i)} = -\frac{i(1+2i)}{2(1+2i)} = -\frac{1}{2}i$

Donc : $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

On a : $\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}\right) \equiv \arg \frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} \quad [2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$



Ainsi, le triangle AEF est rectangle en F.

d- On a : $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} \times \frac{Z_D - Z_A}{Z_D - Z_E} = -1$

Donc $\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}\right) + \left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \pi \quad [2\pi]$

Donc : $-\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv -\pi \ [2\pi]$ et ainsi $\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

• Le triangle ADE est rectangle en D, donc il est inscrit au cercle de diamètre $[AE]$.

• Le triangle AEF est rectangle en F, donc il est inscrit au cercle de diamètre $[AE]$.

Par suite, les points A, D, E et F appartiennent au cercle de diamètre $[AE]$.

EXERCICE 4

On tire 3 boules simultanément. $\quad 3B \quad 4R \quad 5V$

L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 éléments parmi 12 éléments.

Ainsi : $\text{card}\ \Omega = C_{12}^3 = \frac{12\times10\times11}{3\times2} = 2 \times 10 \times 11 = 220$

1) a- A : "Obtenir exactement 2 boules rouges". On a : $\text{card A} = C_4^2 \times C_8^1 = 6\times8=48$

Donc : $p(A) = \frac{\text{card A}}{\text{card}\ \Omega} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$

B : "Obtenir exactement 1 boule verte". On a : $\text{card B} = C_5^1 \times C_7^2 = 5 \times 21 = 105$

Donc : $p(B) = \frac{\text{card B}}{\text{card}\ \Omega} = \frac{5\times21}{2\times10\times11} = \frac{21}{44}$

b- $A \cap B$: "Obtenir 2 boules rouges et 1 boule verte". $\text{card}\ A \cap \text{B} = C_4^2 \times C_5^1 = 6 \times 5 = 30$

Donc : $p(A \cap B) = \frac{\text{card}\ A\cap B}{\text{card}\ \Omega} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$ et ainsi : $p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{3/22}{21/44} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

On a : $p(A) \neq p(A|B)$ donc les événements A et B sont dépendants.

4) a- X la variable aléatoire égales au nombre de boules vertes tirées.

• Les valeurs prises par X sont : 0, 1, 2 et 3. On a : $p(X = 1) = p(B) = \frac{21}{44}$

• $p(X = 0) = \frac{C_7^3}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$

• $p(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_7^1}{220} = \frac{10\times7}{220} = \frac{14}{44}$

• $p(X = 3) = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{2}{44}$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{14}{44}$	$\frac{2}{44}$

La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessus.

b- La probabilité d'obtenir au moins 2 boules vertes est $p(X = 2) + p(X = 3) = \frac{16}{44} = \frac{4}{11}$

PPOBLÈME

$f(x) = x^4(\ln x - 1)^2$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\ln x - 1)^2 = +\infty$. Donc :

$(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) a- On a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^2(x\ \ln x - x)^2 = 0 = f(0)$.

Donc f est continue à droite en 0.

b- $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} x\ (x\ \ln x - x)^2 = 0$

f est donc dérivables à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

$(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente à droite en $O(0,0)$

3) a- Soit $x \in]0, +\infty[$. On a :

- $f'(x) = 4x^3(\ln x - 1)^2 + x^4 \times 2(\ln x - 1)\frac{1}{x}$
  $= 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 2 + 1)$
  $= 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$ ou $2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$ ou $x = \sqrt{e}$ (car $x > 0$)
- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \ln x \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} \leq x \leq e$

Tableau de variation de la fonction f

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) a- pour $x > 0$, $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$

Remarque

On montre que f' est dérivable à droite en 0 et $f''(0) = 0$.

On dresse le tableau de signe de la fonction f'' :

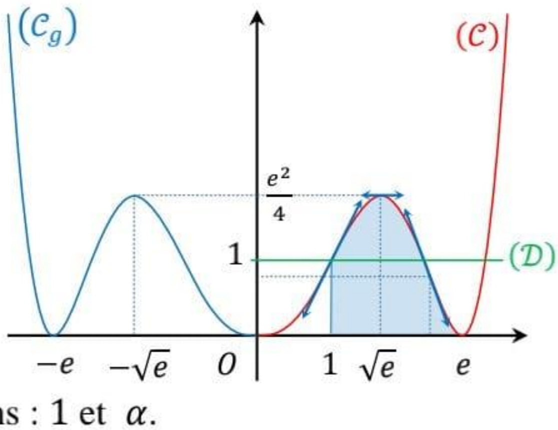
x	0		1		$e^{5/6}$		$+\infty$
$f''(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b- On voit que la dérivée s'annule en changeant de signe aux points 1 et $e^{5/6}$.

Les points d'abscisses 1 et $e^{5/6}$ sont donc des points d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

On a : $f(1) = 1$ et $f\left(e^{5/6}\right) = \frac{\sqrt[3]{e}\, e^3}{36} \approx 0{,}8$.

5) a- Tracé de la courbe $(\mathcal{C})$.



b- Pour $x > 0$, on a :

$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2(\ln x - 1) = -1$ ou $x^2(\ln x - 1) = 1$

La droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 1$ coupe la courbe $(\mathcal{C})$ en 3 points dont les abscisses sont :

1, α avec $\sqrt{e} < \alpha < e$ et β avec $\beta > e$. On a :

- $x^2(\ln x - 1) = -1$ pour $x \in \{1, \alpha\}$
- $x^2(\ln x - 1) = 1$ pour $x = \beta$.

L'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$ admet donc deux solutions : 1 et α.

6) a- Pour $x = 0$, on a $g(-x) = g(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $(-x) \in \mathbb{R}^*$ et :

$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$.

Ainsi, g est une fonction paire.

b- Tracé de la courbe $(\mathcal{C})$:

Soit $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par la symétrie dont l'axe est celui des ordonnées.

On a : $\left(\mathcal{C}_g\right) = (\mathcal{C}) \cup (\mathcal{C}')$ (voir figure ci-dessus).

7) a- On a :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \left(\frac{x^5}{5}\right)' (\ln x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{5}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1) - \frac{x^5}{25}\right]_1^e \\ &= \left[\frac{x^5}{25}(5\ln x - 6)\right]_1^e \\ &= \frac{6-e^5}{25} \end{aligned}$$

b- Soit $x > 0$. On a : $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$ donc :

$$h'(x) = 5x^4(\ln x - 1)^2 + x^5 \times 2(\ln x - 1)\frac{1}{x} = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$$

c- Pour $x > 0$, on a : $f(x) = \frac{1}{5}h'(x) - \frac{2}{5}x^4(\ln x - 1)$.

Donc : $$\begin{aligned} \int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\int_1^e h'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{5}\int_1^e x^4(\ln x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}[h(x)]_1^e - \frac{2}{5}I \\ &= \frac{1}{5}(h(e) - h(1)) - \frac{2}{5}I \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I \end{aligned}$$

d- Pour $x \in [1, e]$ on a $f(x) \geq 0$, donc l'aire demandée est :

$\mathcal{A} = \int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{6-e^5}{25} = \frac{2e^5-37}{125}$ unités d'aire.